1 Préambule : Un bref (et très imcomplet) historique de la théorie des probabilités.

Les concepts fondateurs de la théorie des probabilités sont longtemps restés à la frontière des mathématiques. Les mathématiciens contemporains de leur émergence ont souvent considéré qu'on ne pouvait considérer qu'ils faisaient partie de la discipline.

Il ne faut donc pas sous-estimer la difficulté d'une modélisation mathématique de concepts très vastes comme hasard, chance, risque, et probabilité.

L'axiomatisation de Kolmogorov, aujourd'hui point de départ des cours de théorie des probabilités, n'est venue que très tardivement (1933), alors que les tentatives de définition avaient été nombreuses, mais souvent insatisfaisantes.

Poincaré, en 1902, résume bien les problèmes rencontrés jusqu'alors :
Le seul nom de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? Cependant, beaucoup de savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne saurait nier que la science n'en ait tiré quelque profit. Comment expliquer cette apparente contradiction ?

La probabilité a-t-elle été définie ? Et, si elle peut l'être, comment ose-t-on en raisonner ? La définition, dira-t-on, est bien simple :

La probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total de cas possibles,... pourvu que ces cas soient également probables. Nous voilà donc réduits à définir le probable par le probable. Comment saurons nous que deux cas possibles sont également probables ? Sera-ce par une convention ?

La conclusion qui semble résulter de tout cela, c'est que le calcul des probabilités est une science vaine, qu'il faut se défier de cet instinct obscur que nous nommions bon sens et auquel nous demandions de légitimer nos conventions.

Mais, cette conclusion, nous ne pouvons plus y souscrire ; cet instinct obscur, nous ne pouvons nous en passer ; sans lui la science serait impossible ; sans lui nous ne pourrions ni découvrir une loi, ni l'appliquer.

L'axiomatique de Kolmogorov est un cadre mathématique qui permet de définir la notion d'expérience aléatoire. On y reviendra. Mais il faut garder en tête que de nombreux résultats classiques ont été en fait découverts bien avant cette axiomatique.

Dès l'antiquité on s'est efforcé de chiffrer le risque. Après tout, la rente viagère existait chez les Romains, et peut-être même auparavant.

La plupart des mots désignant le sort semblent avoir été empruntés au jeu de dé.

Le mot *aléa* signifie à la fois "dé" et "chance".

Le mot *chance* appara^au XIIème siècle, et il semble avoir été initialement employé à la fois le cadre du jeu de dé (chéance du dé), et à la manière, en général favorable, dont peut tourner un événement.

Hasard est emprunté à l'arabe (à travers l'espagnol), al-zaher signifie également dé.

Quant à *probable*, Aristote l'emploie pour qualifier une incertitude qui a tendance à se réaliser assez souvent : une opinion largement partagée est chez un individu donné *probable.*

On n'a pas de traces de calculs explicite de probabilités dans l'Antiquité.

Au Moyen-Age, on en trouve en Europe au XIIème siècle dans un traité de contrats maritimes rédigé par Olivi : il faut évaluer l'assurance des bateaux qui risquent de ne pas revenir et un calcul du risque de naufrage est donc nécessaire. En Chine, les coefficients binômiaux sont connus dès le XIème siècle.

L'intérêt des mathématiciens pour ces calculs de probabilités est aiguisé à la fin du XVIIème siècle. La fameuse correspondance entre Fermat et Pascal date de 1654, elle concerne en particulier le problème des partis, i.e. la question de la répartition des mises d'un jeu de hasard disputé en plusieurs manches lorsque le jeu est interrompu avant son terme. Le traité posthume (1663) de Cardano avait probablement été rédigé un peu plus tôt, il concerne le calcul de probabilités pour un jeu de $1, 2$ ou 3 dés.

En 1657, Huygens, inspiré par la correspondance de Pascal et Fermat rédige un traité sur la question où il calcule des probabilités comme Cardano et de espérances discrètes comme Pascal et Fermat.

Le calcul des probabilités connaît par la suite de nombreux développements, on se doit citer Bernoulli, début XVIIIème, qui énonce une loi des grands nombres, tandis que de Moivre en 1718 raffine le résultat et obtient une première version du TCL pour des variables binômiales. d'Alembert énonce en 1750 une formule générale pour l'espérance d'une variable entière. Les calculs de probabilités conditionnelles voient le jour avec Bayes en 1764. Lagrange en 1770 introduit les premières lois continues pour modéliser la durée d'un jeu de hasard.

La très importante généralisation du TCL est due à Laplace en 1812. Bienaymé, dans les années 1830 étudie les processus de branchement, et démontre l'inégalité dite de Tchebytchev. Ce dernier a vécu un peu plus tard (1880), et en particulier a utilisé cette inégalité pour établir une loi des grands nombres très générale.

C'est à la fin du XIXème et au début XXème que la théorie de la mesure est développée, en particulier grâce à Harnack, Cantor, Peano, Jordan et enfin Borel, et la théorie de l'intégration par Lebesgue qui généralise la notion introduite par Riemann. Ces théories sont à l'origine de l'axiomatisation proposée par Kolmogorov en 1933.

Parallèlement, Markov introduit et étudie les processus qui portent son nom (temps discret, espace d'état fini ou dénombrable), et Polyà démontre de nombreux résultats sur la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ (1920).

La physique mathématique apporte également de nombreuses contributions, en particulier Boltzmann, Gibbs, Poincaré, Smoluchowski, Langevin, Einstein qui introduisent et étudient de nombreux processus aléatoires tels que le mouvement Brownien et des systèmes de particules en interaction.

Après Kolmogorov dans les années 30, la théorie des probabilités va connaître un grand essor, il faut sans doute citer Wiener (étude du mouvement Brownien, années 30), Doob (théorie des martingales, années 40 et 50), Lévy (Brownien et martingales, contemporain de Doob), Itô (années 50 et 60, intégrale stochastique, théorie des excursions), Shannon (années $60, 70$, entropie, théorie de l'information) Dynkin (années 60 à 80, théorie des processus de Markov), Varadhan (théorie des grandes déviations), Sinaï (théorie ergodique),...

La recherche est très active dans le domaine, comme en témoignent les prestigieuses récompenses obtenues par des probabilistes, en particulier trois récentes médailles Fields Werner, Smirnov, Hairer, les deux premiers pour leurs travaux sur la percolation et SLE (Schramm Loewner evolution), le dernier pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles stochastiques. On peut également citer les prix Abel décernés à Sinaï, Varadhan, et enfin le prix Wolf 2019 à Le Gall, Lawler.