Les documents ne sont pas autorisés. Le barème est seulement donné à titre indicatif. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : soyez le plus clair et le plus concis possible !

Exercice 1 *(Algorithmes, 6 points)*

Soit L_1 le langage décrit par l'expression rationnelle suivante : $(bb + ba)^\star$.
Donner l'automate minimal pour le complémentaire de L_1. Pour cela, vous détaillerez chaque étape de votre raisonnement en explicitant l'algorithme utilisé et son exécution.

Exercice 2 *(Langages algébriques, 4 points)*

On considère des mots sur l'alphabet $\{(,)\}$ constitué de deux symboles : parenthèse ouvrante d'une part, et parenthèse fermante d'autre part. Un mot u est bien parenthésé s'il est vide ou s'il est de l'une des deux formes suivantes :

— (v) avec v un mot bien parenthésé ;

— vw avec v et w des mots bien parenthésés.

Par exemple, $(()(()))$ est bien parenthésé, mais $())$ ne l'est pas. Soit L_2 l'ensemble des mots bien parenthésés.

1. Donner une grammaire algébrique pour L_2.
2. Donner un automate à pile pour L_2 (choisir le mode d'acceptation qui paraît le plus adapté).

Exercice 3 *(Reconnaissabilité, 3 points)*

Soit L_3 le langage $\{a^n b a^m \mid n \geq m^2\}$. Dire si L_3 est reconnaissable. Justifier.

Exercice 4 *(Langages rationnels, 2 points)*

On désigne par $\bar{u}$ le miroir d'un mot u. Pour tout langage L, on définit le langage $f(L)$ suivant :

$$f(L) = \{u\bar{u} \mid u \in L\}.$$

Pour cet exercice, il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

1. Donner un exemple de langage rationnel L pour lequel $f(L)$ est rationnel.
2. Donner un exemple de langage rationnel L pour lequel $f(L)$ n'est pas rationnel.

Exercice 5 *(Opérations sur les automates, 5 points)*

Pour tout langage L sur un alphabet Σ, on définit

$$L^{1/3} = \{u \in \Sigma^\star \mid uuu \in L\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si L est reconnaissable, alors $L^{1/3}$ l'est aussi.

On suppose L reconnaissable et soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet pour L. Pour tout état $q \in Q$, on note

$$G_q = \{u \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q_0, u) = q\}$$

(lorsqu'on lit u depuis q_0 on arrive dans l'état q) et

$$D_q = \{u \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q, u) \in F\}$$

(lorsqu'on lit u depuis q on arrive dans un état final).
Plus généralement, pour tout couple d'états (q, q'), on note

$$M_{q,q'} = \{u \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q, u) = q'\}$$

(lorsqu'on lit u depuis q on arrive dans q').
En guise d'échauffement, on pourra ainsi remarquer que

$$G_q = M_{q_0,q} \quad \text{et} \quad D_q = \bigcup_{q' \in F} M_{q,q'}.$$

1. Montrer que, pour tous $q, q' \in Q$, les langages G_q, D_q et $M_{q,q'}$ sont reconnaissables.
2. Que vaut $G_q \cap M_{q,q'} \cap D_{q'}$?
3. Exprimer $L^{1/3}$ en fonction des ensembles G_q, D_q et $M_{q,q'}$.
4. Conclure.