université PARIS DIDEROT PARIS 7

Automates et analyse lexicale (AAL3)
L2 – Examen – 2h
15 février 2020

Nom :

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Consignes :

— Tous documents ou appareils électroniques interdits.
— Vous devez répondre directement sur les traits pointillés.
— Si vous n'avez pas assez de place pour vos réponses (**ce qui ne devrait pas arriver**), demandez une copie d'examen et insérez-y ce sujet complété.
— Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et d'en coller les bords seulement.

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1

Soit A et B les langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : $(ab + abb)^*$ et $(aba + b)^*$.
✎. Donner les 3 plus petits mots de $A \cap B$:

1. ....

2. ....

3. ....

Exercice 2

Pour tout langage L, on définit le langage $\mathsf{Carrés}(L) = \{uu \mid u \in L\}$ (l'ensemble des carrés des mots de L).

1. Donner un langage reconnaissable A infini tel que $\mathsf{Carrés}(A)$ soit reconnaissable :

Expression rationnelle pour A	Expression rationnelle pour $\mathsf{Carrés}(A)$
....	....

2. Donner un langage reconnaissable B tel que $\mathsf{Carrés}(B)$ *ne soit pas* reconnaissable :

Expression rationnelle pour B	Description ensembliste pour $\mathsf{Carrés}(B)$
....	....

3. Donner un langage *non reconnaissable* C tel que C^* soit reconnaissable :

Description ensembliste pour C	Expression rationnelle pour C^*
....	....

Exercice 3

Soit A le langage des mots dont la longueur est un carré :

$$A = \{u \mid \exists k \in \mathbb{N}, |u| = k^2\}.$$

Le but de cet exercice est de savoir si A est reconnaissable.
Soit i et j des entiers tels que $i < j$.

1. Donner un mot *non vide* de taille minimale dans $(a^{i^2})^{-1}A$: ....

2. Montrer que ce mot n'est pas dans $(a^{j^2})^{-1}A$: ....

....

....

....

3. Combien A a-t-il de résiduels distincts ? ....

4. D'après le théorème de ...., on a donc (cocher la bonne réponse) :
☐ A reconnaissable ☐ A non reconnaissable

Exercice 4

Soit le langage $A = \{a^m b^n \mid n = m^2\}$. Est-il reconnaissable ?
✎. Compléter la partie correspondante.

Oui, A est reconnu par l'automate fini suivant :

Non.
Par l'absurde, si $A \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ .... , y .... et

$\forall k$, ...

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

✎. **Même question** avec le langage $B = \{a^m b^n \mid n \equiv m^2 \mod 2\}$.

Oui, B est décrit par l'expression rationnelle suivante :

....

....

Non.
Par l'absurde, si $B \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ .... , y .... et

$\forall k$, ...

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

Exercice 5

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $(ab+ba)^*a^*$. On se propose de décrire tous les résiduels de L en les ordonnant sous la forme d'un arbre.

1. Donner les expressions rationnelles e_1, e_2 et e_3 qui décrivent correctement les résiduels L_1, L_2 et L_3 dans l'arbre ci-dessous.

$e_1 =$ ....

$e_2 =$ ....

$e_3 =$ ....

2. Compléter par L_0, L_1, L_2, L_3, L ou $\emptyset$ les pointillés dans l'arbre des résiduels afin que celui-ci soit correct.

$L_0 = \varepsilon^{-1}L = \ldots\ldots$

- $L_1 = a^{-1}L = \mathcal{L}(e_1)$
  - $L_3 = (aa)^{-1}L = \mathcal{L}(e_3)$
    - $(a^3)^{-1}L = \ldots\ldots$
    - $(aab)^{-1}L = \ldots\ldots$
  - $(ab)^{-1}L = \ldots\ldots$
- $L_2 = b^{-1}L = \mathcal{L}(e_2)$
  - $(ba)^{-1}L = \ldots\ldots$
  - $(bb)^{-1}L = \ldots\ldots$

3. Quels résiduels contiennent le mot vide ? (cocher les bonnes réponses)

☐ L_0 ☐ L_1 ☐ L_2 ☐ L_3 ☐ $\emptyset$

4. En déduire l'automate fini déterministe et complet minimal pour L, dont les états sont les cinq résiduels ci-dessus : compléter la table de transition suivante (ne pas oublier d'indiquer, sous forme de flèches, l'état initial et les états terminaux).

	a	b
L_0	....	....
L_1	....	....
L_2	....	....
L_3	....	....
$\emptyset$	....	....

Exercice 6

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $e = (aa+ab)^*(ba+bb)$.

✎. Compléter les étapes ci-dessous de l'algorithme de Glushkov pour obtenir un automate fini non déterministe $\mathcal{A}$ pour L.

1. Expression rationnelle linéarisée (on appellera $x_1, \ldots, x_8$ les nouvelles variables) : ....

....

3. Table de transitions (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux)

	a	b
0	....	....
1	....	....
2	....	....
3	....	....
4	....	....
5	....	....
6	....	....
7	....	....
8	....	....

2. Tableau des successeurs

début	....
x_1	....
x_2	....
x_3	....
x_4	....
x_5	....
x_6	....
x_7	....
x_8	....

✎. Déterminiser l'automate $\mathcal{A}$ pour obtenir un automate déterministe *complet* $\mathcal{A}'$ via la table de transition suivante à compléter (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux).

	a	b
0	....	....
$\{1,3\}$	....	....
2	....	....
4	....	....
$\{5,7\}$	....	....
6	....	....
8	....	....
p	....	....

On renommera les états de $\mathcal{A}'$ de 0 à 7 comme suit *(vous êtes encouragé à écrire sur votre brouillon la table de transition avec les nouveaux numéros)* :

Ancien nom	0	$\{1,3\}$	2	4	$\{5,7\}$	6	8	p
Nouveau nom	0	1	2	3	4	5	6	7

✎. Minimiser $\mathcal{A}'$ en complétant les étapes ci-dessous de l'algorithme de Moore.

1. Groupes d'états à l'étape 0 : { . . . . } { . . . . }

2. a et b séparent . . . . de . . . .

Groupes d'états à l'étape 1 : { . . . . } { . . . . } { . . . . }

3. b sépare . . . . de . . . .

Groupes d'états à l'étape 2 :

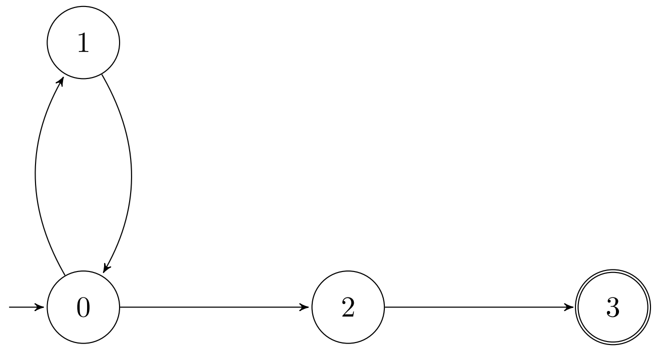
{ . . . . } { . . . . } { . . . . } { . . . . }

4. a et b séparent . . . . de . . . .

Groupes d'états à l'étape 3 : { . . . . } { . . . . } { . . . . }

{ . . . . } { . . . . }

✎. En supprimant l'état puits, on obtient l'automate déterministe minimal (non complet) suivant (indiquer les transitions sur le dessin ci-dessous) :



✎. En utilisant la méthode du lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle pour le langage décrit par l'automate précédent : écrire puis résoudre le système d'équations sur les langages L_0, L_1, L_2 et L_3 en complétant ce qui suit.

$$\begin{cases} L_0 = \dots\dots\dots\dots \\ L_1 = \dots\dots\dots\dots \\ L_2 = \dots\dots\dots\dots \\ L_3 = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Donc $L_2 = \dots\dots\dots\dots$

d'où l'expression pour L_0 :

$L_0 = \dots\dots\dots\dots$

donc par le lemme d'Arden :

$L_0 = \dots\dots\dots\dots$

L'expression rationnelle trouvée est donc $e' = \dots\dots\dots\dots$

✎. Que dire de e et e' ? . . . .