université PARIS DIDEROT PARIS 7

Automates et analyse lexicale (AAL3)
L2 – Examen – 3h
8 janvier 2020

Nom : Bonne

Prénom : Année

Numéro d'étudiant : 2020

Consignes :

— Tous documents ou appareils électroniques interdits.

— Vous devez répondre directement sur les traits pointillés.

— Si vous n'avez pas assez de place pour vos réponses (**ce qui ne devrait pas arriver**), écrivez au verso de la dernière feuille, ou demandez une copie d'examen et insérez-y ce sujet complété.

— Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et d'en coller les bords seulement.

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1

Soit A et B les langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : $(ab + abb)^*$ et $(aba + b)^*$.
✎. Donner les 3 plus petits mots de $A \cap B$:

1. ε

2. $abab$

3. $ababb$

Exercice 2

Pour tout langage L, on définit le langage $\mathsf{Carres}(L) = \{uu \mid u \in L\}$ (l'ensemble des carrés des mots de L).

1. Donner un langage reconnaissable A infini tel que $\mathsf{Carres}(A)$ soit reconnaissable :

Expression rationnelle pour A	Expression rationnelle pour $\mathsf{Carres}(A)$
a^*	$(aa)^*$

2. Donner un langage reconnaissable B tel que $\mathsf{Carres}(B)$ *ne soit pas* reconnaissable :

Expression rationnelle pour B	Description ensembliste pour $\mathsf{Carres}(B)$
a^*b	$\{a^n b a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

3. Donner un langage *non reconnaissable* C tel que C^* soit reconnaissable :

Description ensembliste pour C	Expression rationnelle pour C^*
$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a, b\}$	$(a+b)^*$

Exercice 3

Soit A le langage des mots dont la longueur est un carré :

$$A = \{u \mid \exists k \in \mathbb{N}, |u| = k^2\}.$$

Le but de cet exercice est de savoir si A est reconnaissable.
Soit i et j des entiers tels que $i < j$.

1. Donner un mot *non vide* de taille minimale dans $(a^{i^2})^{-1}A$: a^{2i+1}

2. Montrer que ce mot n'est pas dans $(a^{j^2})^{-1}A$:
$j^2 + 2i + 1$ n'est pas un carré car $(j+1)^2 = j^2 + 2j + 1 > j^2 + 2i + 1$,

donc $a^{j^2} a^{2i+1} \notin A$, donc $a^{2i+1} \notin (a^{j^2})^{-1}A$.

3. Combien A a-t-il de résiduels distincts ? une infinité ($(a^{i^2})^{-1}A$ pour chaque i)

4. D'après le théorème de Myhill-Nerode, on a donc (cocher la bonne réponse) :

☐ A reconnaissable ☑ A non reconnaissable

Exercice 4

Soit le langage $A = \{a^m b^n \mid n = m^2\}$. Est-il reconnaissable ?

✎. Compléter la partie correspondante.

Oui, A est reconnu par l'automate fini suivant :

Non.

Par l'absurde, si $A \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le lemme de l'étoile

On choisit $u = a^N b^{N^2}$:

alors $u \in A$ et $|u| \geq N$

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy| \leq N$, $y \neq \varepsilon$ et

$\forall k,\ xy^k z \in A$

Or pour $k =$ 0 on a :

$xz = a^{N-|y|} b^{N^2} \notin A$

Contradiction avec le lemme de l'étoile

donc A n'est pas reconnaissable.

✎. **Même question** avec le langage $B = \{a^m b^n \mid n \equiv m^2 \mod 2\}$.

Oui, B est décrit par l'expression rationnelle suivante :

$(aa)^*(bb)^* + (aa)^*a(bb)^*b$

Non.

Par l'absurde, si $B \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ ...., y .... et

$\forall k,$ ....

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

Exercice 5

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $(ab+ba)^*a^*$. On se propose de décrire tous les résiduels de L en les ordonnant sous la forme d'un arbre.

1. Donner les expressions rationnelles e_1, e_2 et e_3 qui décrivent correctement les résiduels L_1, L_2 et L_3 dans l'arbre ci-dessous.

$e_1 = b(ab+ba)^*a^* + a^*$

$e_2 = a(ab+ba)^*a^*$

$e_3 = a^*$

2. Compléter par L_0, L_1, L_2, L_3, L ou $\emptyset$ les pointillés dans l'arbre des résiduels afin que celui-ci soit correct.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & L_0 = \varepsilon^{-1}L = L \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & & L_1 = a^{-1}L = \mathcal{L}(e_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & L_2 = b^{-1}L = \mathcal{L}(e_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & L_3 = (aa)^{-1}L = \mathcal{L}(e_3) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (ab)^{-1}L = L_0 & & (ba)^{-1}L = L_0 & & (bb)^{-1}L = \emptyset \\
(a^3)^{-1}L = L_3 & & (aab)^{-1}L = \emptyset & & & & &
\end{tikzcd}
$$

3. Quels résiduels contiennent le mot vide ? (cocher les bonnes réponses)
☑ L_0 ☑ L_1 ☐ L_2 ☑ L_3 ☐ $\emptyset$

4. En déduire l'automate fini déterministe et complet minimal pour L, dont les états sont les cinq résiduels ci-dessus : compléter la table de transition suivante (ne pas oublier d'indiquer, sous forme de flèches, l'état initial et les états terminaux).

		a	b
$\leftrightarrow$	L_0	L_1	L_2
$\leftarrow$	L_1	L_3	L_0
	L_2	L_0	$\emptyset$
$\leftarrow$	L_3	L_3	$\emptyset$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Exercice 6

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $e = (aa+ab)^*(ba+bb)$.
✎. Compléter les étapes ci-dessous de l'algorithme de Glushkov pour obtenir un automate fini non déterministe $\mathcal{A}$ pour L.

1. Expression rationnelle linéarisée (on appellera $x_1, \ldots, x_8$ les nouvelles variables) :

$(x_1x_2 + x_3x_4)^*(x_5x_6 + x_7x_8)$

3. Table de transitions (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux)

2. Tableau des successeurs

début	x_1, x_3, x_5, x_7
x_1	x_2
x_2	x_1, x_3, x_5, x_7
x_3	x_4
x_4	x_1, x_3, x_5, x_7
x_5	x_6
x_6	–
x_7	x_8
x_8	–

		a	b
$\rightarrow$	0	1, 3	5, 7
	1	2	–
	2	1, 3	5, 7
	3	–	4
	4	1, 3	5, 7
	5	6	–
$\leftarrow$	6	–	–
	7	–	8
$\leftarrow$	8	–	–

✎. Déterminiser l'automate $\mathcal{A}$ pour obtenir un automate déterministe *complet* $\mathcal{A}'$ via la table de transition suivante à compléter (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux).

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{1,3\}$	$\{5,7\}$
	$\{1,3\}$	2	4
	2	$\{1,3\}$	$\{5,7\}$
	4	$\{1,3\}$	$\{5,7\}$
	$\{5,7\}$	6	8
$\leftarrow$	6	p	p
$\leftarrow$	8	p	p
	p	p	p

On renommera les états de $\mathcal{A}'$ de 0 à 7 comme suit *(vous êtes encouragé à écrire sur votre brouillon la table de transition avec les nouveaux numéros)* :

Ancien nom	0	$\{1,3\}$	2	4	$\{5,7\}$	6	8	p
Nouveau nom	0	1	2	3	4	5	6	7

✎. Minimiser $\mathcal{A}'$ en complétant les étapes ci-dessous de l'algorithme de Moore.

1. Groupes d'états à l'étape 0 : $\{0,1,2,3,4,7\}$ $\{5,6\}$

2. a et b séparent 4 de $0,1,2,3,7$

Groupes d'états à l'étape 1 : $\{0,1,2,3,7\}$ $\{4\}$ $\{5,6\}$

3. b sépare 1 de $0,2,3,7$

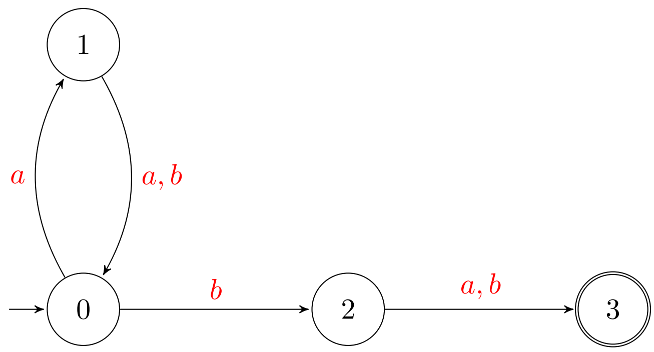
Groupes d'états à l'étape 2 :

$\{0,2,3,7\}$ $\{1\}$ $\{4\}$ $\{5,6\}$

4. a et b séparent 7 de $0,2,3$

Groupes d'états à l'étape 3 : $\{0,2,3\}$ $\{1\}$ $\{4\}$ $\{7\}$ $\{5,6\}$

✎. En supprimant l'état puits, on obtient l'automate déterministe minimal (non complet) suivant (indiquer les transitions sur le dessin ci-dessous) :



✎. En utilisant la méthode du lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle pour le langage décrit par l'automate précédent : écrire puis résoudre le système d'équations sur les langages L_0, L_1, L_2 et L_3 en complétant ce qui suit.

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_0 & = & aL_1 + bL_2 \\ L_1 & = & (a+b)L_0 \\ L_2 & = & (a+b)L_3 \\ L_3 & = & \varepsilon \end{array}\right.$$

Donc $L_2 = a+b$

d'où l'expression pour L_0 :

$L_0 = a(a+b)L_0 + b(a+b)$

donc par le lemme d'Arden :

$L_0 = \big(a(a+b)\big)^* b(a+b)$

L'expression rationnelle trouvée est donc $e' = \big(a(a+b)\big)^* b(a+b)$

✎. Que dire de e et e' ? Elles sont équivalentes.