

Les documents ne sont pas autorisés. Le barème est seulement donné à titre indicatif. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation : soyez le plus clair et le plus concis possible !

Les langages considérés seront sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ .

**Exercice 1** (3 points)

Soit  $L_1 = \mathcal{L}(a(aa)^*b^*)$  et  $L_2 = \mathcal{L}((a + bb)^*)$ .

1. Donner le plus petit mot contenu dans les langages suivants :
  - (a)  $L_1$  ;
  - (b)  $L_2$  ;
  - (c)  $L_1 \cap L_2$  ;
  - (d)  $(L_1 \cap L_2)^*$ .
2. Donner l'ensemble des mots de taille 5 de  $L_1 \cup L_2$ .

**Exercice 2** (6 points)

Soit  $L_1$  le langage des mots contenant le facteur  $ab$ , et  $L_2$  le langage des mots ayant  $bb$  comme préfixe.

1. Donner une expression rationnelle pour  $L_1$  et pour  $L_2$ .
2. Donner un automate non déterministe  $A_1$  à 3 états pour  $L_1$ .
3. Déterminer  $A_1$  pour obtenir un automate déterministe à 4 états pour  $L_1$ .
4. Trouver un automate déterministe  $A'_1$  équivalent à  $A_1$  mais à seulement 3 états.
5. Donner un automate déterministe  $A_2$  à 3 états pour  $L_2$ .
6. Donner une description en français du langage  $L_1 \cap L_2$ .
7. En effectuant le produit des automates  $A'_1$  et  $A_2$ , donner un automate déterministe pour le langage  $L_1 \cap L_2$ .
8. Donner un automate non déterministe à 6 états pour  $L_1 \cup L_2$ .

**Exercice 3** (6 points)

Soit  $e$  l'expression rationnelle  $a^*(ab + ba)^*$  et  $L$  le langage qu'elle décrit.

1. Grâce à l'algorithme de votre choix, trouver un automate fini non déterministe pour  $L$ . Donner le nom de l'algorithme et détailler les étapes d'exécution.
2. Trouver un automate fini non déterministe  $A$  avec une  $\varepsilon$ -transition et seulement 4 états pour  $L$ .
3. Éliminer l' $\varepsilon$ -transition de  $A$  pour obtenir un automate fini non déterministe  $A'$  à 4 états pour  $L$ .
4. En appliquant l'algorithme de votre choix, trouver une expression rationnelle  $e'$  pour  $\mathcal{L}(A')$ . Donner le nom de l'algorithme et détailler les étapes d'exécution. Que dire des expressions  $e$  et  $e'$  ?

**Exercice 4** (5 points)

Soit  $L$  le langage des mots se terminant par  $aa$ .

1. Donner une expression rationnelle pour  $L$ .
2. Donner un automate pour  ${}^cL$  (le complémentaire de  $L$ , noté aussi  $\bar{L}$ ). Expliquez et justifiez votre démarche.
3. Donner une expression rationnelle pour  ${}^cL$ . Expliquez et justifiez votre démarche (vous pouvez vous servir de la question 2).