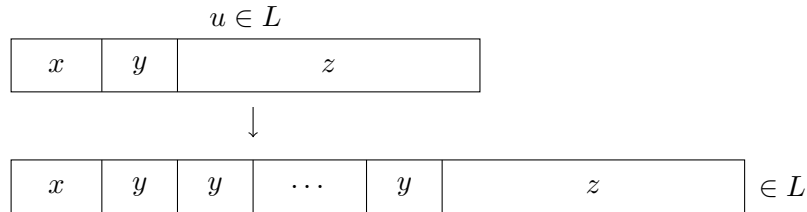


Le « lemme de l'étoile » (ou lemme d'itération, ou de la pompe, ou de pompage, etc.) est une propriété des langages reconnaissables. Informellement, il montre que dans tout mot u assez grand appartenant à un langage reconnaissable L , il existe une partie du mot qu'on peut répéter un nombre arbitraire de fois tout en restant dans L .



Il existe plusieurs versions de ce lemme selon ce qu'on peut choisir, ou non, concernant la zone à l'intérieur de laquelle on itère. Nous n'utiliserons que la version « usuelle » suivante.

Lemme

Soit L un langage reconnaissable. Il existe un entier N tel que pour tout mot $u \in L$, si $|u| \geq N$ alors il existe des mots x, y, z tels que

$$\begin{cases}
 u = xyz \\
 \text{et } y \neq \varepsilon \\
 \text{et } |xy| \leq N
 \end{cases}
 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, xy^kz \in L.$$

Dans cette version, on garantit seulement que y n'est « pas trop loin » du début du mot, mais attention, à part cette contrainte, on ne choisit pas le découpage x, y, z : *il nous est imposé*.

Ce lemme sert principalement à montrer qu'un langage **n'est pas** reconnaissable : il suffit en effet de montrer qu'il ne satisfait pas la propriété du lemme. Voyons un **exemple d'utilisation**.

Soit $L = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$ (l'ensemble des mots ayant autant de a que de b). Montrons que L n'est pas reconnaissable.

On raisonne par l'absurde. Si L était reconnaissable, alors il existerait un entier N donné par le lemme de l'étoile. Soit $u = a^N b^N$: puisque $|u| \geq N$ et $u \in L$, il existe x, y, z comme dans l'énoncé du lemme. Puisque $|xy| \leq N$ et que les N premières lettres de u sont des a , on a $y = a^i$ pour un certain $i > 0$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$xy^kz = a^{(N-i)+ik} b^N.$$

Ainsi, pour $k = 0$, $xy^kz = a^{N-i} b^N \notin L$ puisque ce mot n'a pas autant de a que de b . C'est une contradiction avec le lemme de l'étoile, donc L n'est pas reconnaissable.

→ On n'écrit donc **pas** des choses comme « $\forall k, u = xy^kz$ » puisque ce n'est vrai que pour $k = 1$, ou encore « prenons $x = a, y = a^3b$ et $z = b^3$ » puisque, d'une part, on ne choisit pas le découpage x, y, z , et d'autre part, il faut un mot $u \in L$ de taille supérieure à N qui peut être grand et qu'on ne maîtrise pas.