TD n°1

Langages et Expressions Rationnelles

A désigne un alphabet fini. Le mot vide est noté ε.

Exercice 1 (Généralités)

1. *Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $aabgjdd$, $titi$, $babc$.*
2. *Donner l'ensemble des couples de mots (u, v) tels que $u \cdot v = abaac$ (Remarque : on peut ne pas écrire la concatenation "$\cdot$", si c'est clair à partir du contexte. Par exemple, ici on peut écrire juste $uv = abaac$).*
3. *Un mot u est un* facteur *d'un mot v si u apparaît à l'intérieur de v : v s'écrit $w_1 \cdot u \cdot w_2$ pour certains mots w_1 et w_2 (qui peuvent être vides). Un mot u est un* sous-mot *d'un mot v si on peut obtenir u à partir de v par 'effacement' de certaines lettres (pas forcément consécutives) de v. Le nombre d'*occurrences *d'un facteur (resp. sous-mot) u dans le mot v est le nombre de façons de voir u comme facteur (resp. sous-mot) de v.*

   Donner le nombre d'occurrences du facteur aba dans le mot $v = ababab$. Donner le nombre d'occurrences du sous-mot aba dans le même mot v.

Exercice 2 (Opérations sur les langages)

1. *Calculer $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}$ pour les ensembles suivants :*
   (a) $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ *et* $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
   (b) $\mathcal{L} = \emptyset$ *et* $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   (c) $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ *et* $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   (d) $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ *et* $\mathcal{M} = A^*$.
2. *Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, on a : $\mathcal{L} \cdot (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}) \cup (\mathcal{L} \cdot \mathcal{N})$. Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.*
3. *Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes (prouvez ou donnez un contre-exemple) ?*
   (a) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
   (b) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
   (c) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
   (d) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
   (e) $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
   (f) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
   (g) $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
   (h) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$
   (i) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 (Écrire des expressions rationnelles) *Donner une expression rationnelle pour le langage (sur alphabet $\{a, b\}$) des mots :*

1. *contenant exactement un a ;*
2. *contenant exactement deux a ;*
3. *contenant au moins deux a ;*
4. *contenant au moins un a et un b ;*
5. *contenant un nombre pair de a ;*
6. *qui contiennent le facteur aa ;*
7. *qui ne contiennent pas le facteur aa ;*
8. *qui ne contiennent pas le facteur ab ;*
9. *qui ne contiennent pas le facteur aba ;*
10. *contenant le même nombre de a que de b.*

Exercice 4 (Commutation) *(exercice optionnel)*

Soient u et v deux mots. On dit que u et v commutent *si $u \cdot v = v \cdot u$.*

Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe un mot w et deux entiers positifs ou nuls m et n tels que $u = w^m$ et $v = w^n$. Pour le sens $\Rightarrow$, on pourra procéder par récurrence sur $|u| + |v|$.