TD n°6

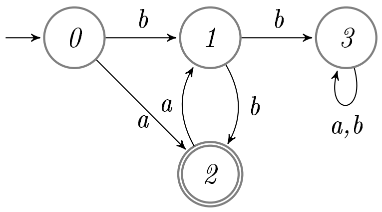
Lemme d'Arden – Lemme de l'Étoile

Exercice 1 (Lemme d'Arden) *Utiliser le lemme d'Arden pour résoudre le système d'équations suivant :*

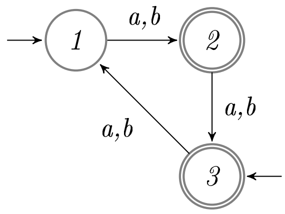
$$\begin{cases} L_1 = aL_2 + bL_4 \\ L_2 = aL_4 + bL_3 \\ L_3 = (a+b)L_3 + \epsilon \\ L_4 = aL_4 + \epsilon \end{cases}$$

Exercice 2 (De l'Automate à l'Expression Rationnelle) *Pour chacun des trois automates donnés au-dessous :*

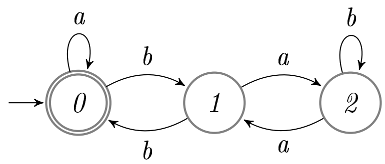
1. *Déterminer le système d'équations associé à $\mathcal{A}_i$.*
2. *Résoudre ce système en utilisant le lemme d'Arden. En déduire une expression rationnelle pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$.*



$\mathcal{A}_1$



$\mathcal{A}_2$



$\mathcal{A}_3$

Exercice 3 (Propriétés de Clôture de *Rec*) *Montrer que les langages reconnaissables sont clos sous les opérations suivantes :*

1. *Différence ensembliste :* $X - Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$
2. *Différence ensembliste symmétrique :* $X \triangle Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y, \text{ ou } x \in Y \text{ et } x \notin X\}$

Exercice 4 (Lemme de l'étoile) *Pour chacun des langages suivants, dire s'il est reconnaissable ou non. On pourra utilisier le lemme de l'étoile :*

> *Soit $\mathcal{L}$ un langage reconnaissable. Il existe un entier N tel que tout mot $u \in \mathcal{L}$ de taille supérieure ou égale à N admet une factorisation $u = xyz$ satisfaisant :*
> — $y \neq \epsilon$ *et* $|xy| \leq N$
> — $xy^kz \in \mathcal{L}$ *pour tout entier* $k \geq 0$.

1. $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n : m < n\}$

3. $\{a^m b^n : m \neq n\}$
4. $\{u^2 : u \in \{a,b\}^*\}$
5. $\{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{a^p : p \textit{ premier}\}$

Exercice 5 (*) *La* clôture sous préfixe *d'un langage L est définie comme*

$$Pref(L) = \{u \mid \textit{il existe } v \textit{ tel que } u \cdot v \in L\}$$

1. *Montrer : si L est reconnaissable, alors $Pref(L)$ est également réconnaissable.*
2. *Est-ce que l'inverse est vrai ?*

Exercice 6 (*) *Comme conséquence du lemme d'Arden, toute équation de la forme*

$$X = A \cdot X \cup B$$

où A et B sont des ensembles réguliers, a une solution régulière, et quand $\epsilon \notin A$ cette solution est unique.
Savez-vous écrire une équation qui contient seulement X, des ensembles réguliers, et les opérations d'union et de concaténation, et qui a une solution qui n'est pas régulière ?