Exo 2, Question 1

1) $\boxed{a^* b^*}$

$u \sim v$ ssi $\forall w \in A^* \, (uw \in L \text{ ssi } vw \in L)$

mots pas préfixe :

$[ba] = \{w \mid w \text{ pas préfixe d'un mot de } L\}$

$= A^* b A^* a A^* \quad / \{w \mid ba.w \in L\} = \emptyset$

$[\varepsilon]$ On calcule $\{w \mid \varepsilon . w \in L\} = a^* b^*$

$[\varepsilon] = a^*$

$[b] \quad \{w \mid bw \in L\} = b^*$

$[b] = a^* b^+$

préfixes d'un mot de L

$A^* = \underbrace{[\varepsilon] + [b] + [ba]}_{} = \boxed{a^* + a^* b^+} + A^* b A^* a A^*$

partition de A^*

Exo 2 Question 2

On note $[v]$ la classe d'eq de v.

$\{w \mid |w|_a = 1\}$

$[\varepsilon]$ $\{w \mid \varepsilon.w \in L\} = \{w \mid |w|_a = 1\}$.

$= b^*$

$[a]$ $\{w \mid a.w \in L\} = b^*$

On peut oublier.

ne sert pas vraiment !

$= b^* a b^*$

$[aa] = A^* a A^* a A^*$ ← pas préfixe d'un mot de L

a

$\{w \mid a.w \in L\} = b^*$

Ex 0 Question 3

$\{ w \mid |w|_a \geq 2 \}$

$[\varepsilon] = b^*$

$[a] = b^* a b^*$

$[aa] = A^* a A^* a A^*$

Questions

$L = \{ w \mid w \text{ contient } ab \}$

$(ab)^{-1} L$

$[ab] = L = A^* ab A^*$

$\{ w \mid ab.w \in L \} = A^*$

$[a] = \{ w.a \mid w \text{ ne contient pas } ab \}$

$\{ w \mid aw \in L \} = bA^* + \underbrace{A^* ab A^*}_{= L}$

$= b^* a^+$

$\{ w \mid \varepsilon . w \in L \} = L$

$[\varepsilon] =$

$\varepsilon + b + bb + \dots$

$= b^*$

$A^* ab A^* + b^* a^+ + b^* = A^*$

$(ab)^{-1} L = \{ v \mid abv \in L \}$

Exo 3

Partie à compléter :

$a^{-1}.\emptyset = \emptyset$

$a^{-1}.\varepsilon = \emptyset$

$a^{-1}.b = \emptyset$ (si $b \neq a$)

$a^{-1}.a = \varepsilon$

$(au)^{-1}.L$

$(ua)^{-1}.L$

$a^{-1}.(L_1 + L_2) = a^{-1}.L_1 + a^{-1}.L_2$

$a^{-1}.(L_1.L_2) = (a^{-1}L_1.L_2) + a^{-1}.L_2$ si $\varepsilon \in L_1$

$a^{-1}.(L_1.L_2) = (a^{-1}.L_1).L_2$ si $\varepsilon \notin L_1$

$a^{-1}.(L^*) = (a^{-1}.L)L^*$

$L^* = L.L.L.L\ldots$

Explications :

$a^{-1}.\emptyset = \{w \mid aw \in \emptyset\}$

$a^{-1}.\varepsilon = \{w \mid a.w = \varepsilon\}$

$a^{-1}.(L_1L_2) = \{w \mid aw \in L_1L_2\} = \{vv' \mid a.v.v' \; av \in L_1, v' \in L_2\}$

si $\varepsilon \notin L_1$!

$$(uv)^{-1} L = \{ w \mid uvw \in L \}$$

$$= \{ w \mid vw \in \underbrace{\{ vw \mid u . vw \in L \}}_{u^{-1} . L} \}$$

$$= v^{-1} . (u^{-1} . L)$$

$$(au)^{-1} L = u^{-1} . (a^{-1} . L)$$

$$(ua)^{-1} L = a^{-1} . (u^{-1} L)$$

$$(ab)^{-1} L \neq (ba)^{-1} L$$

$$b^{-1} . ba = a$$

$$b^{-1} . ab = \emptyset$$

Q_1 et Q_2

$$L = ba^* + ab$$

$$a^{-1} . L = a^{-1} . (ba^* + ab) = a^{-1} . (ba^*) + a^{-1} . (ab)$$

$$= \emptyset + b = b$$

$$b^{-1} . L = b^{-1} (ba^* + ab) = b^{-1} . (ba^*) + b^{-1} . (ab)$$

$$= a^* + \emptyset = a^*$$

$a^{-1}.L = b = L_1$ $\qquad$ $b^{-1}.L = a^* = L_2$

2) $(ab)^{-1}.L = b^{-1}.(a^{-1}.L) = b^{-1}.b = \varepsilon = L_3$

$(aa)^{-1}.L = a^{-1}.(a^{-1}.L) = a^{-1}.b = \emptyset = L_4$

$(bb)^{-1}.L = b^{-1}.(b^{-1}L) = b^{-1}.a^* = \emptyset = L_4$

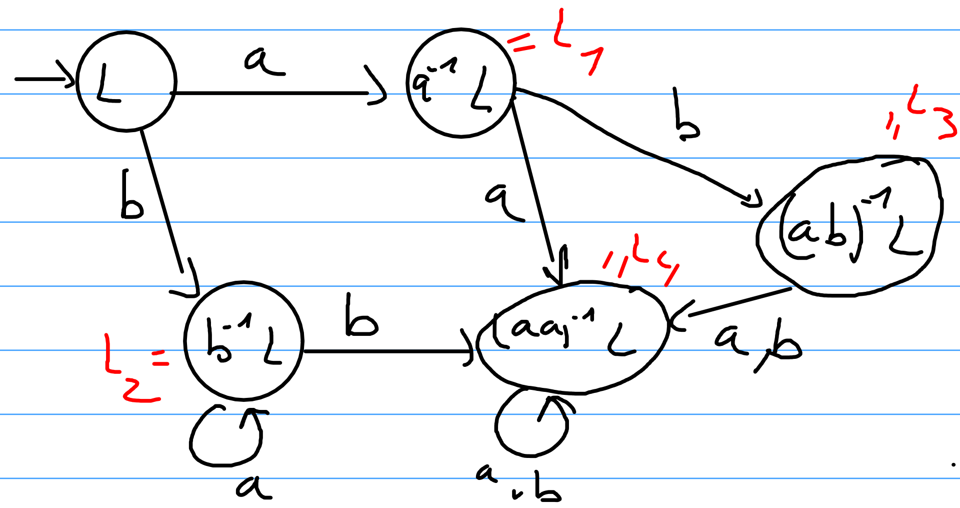
$(ba)^{-1}L = a^{-1}.(b^{-1}L) = a^{-1}.a^* = \varepsilon.a^* = a^* = L_2$

$(aaa)^{-1}.L = L_4 = (aab)^{-1}.L$

$(aba)^{-1}L = L_4 = (abb)^{-1}.L$

$(baa)^{-1}L = L_2$ || $(bab)^{-1}.L = L_4$

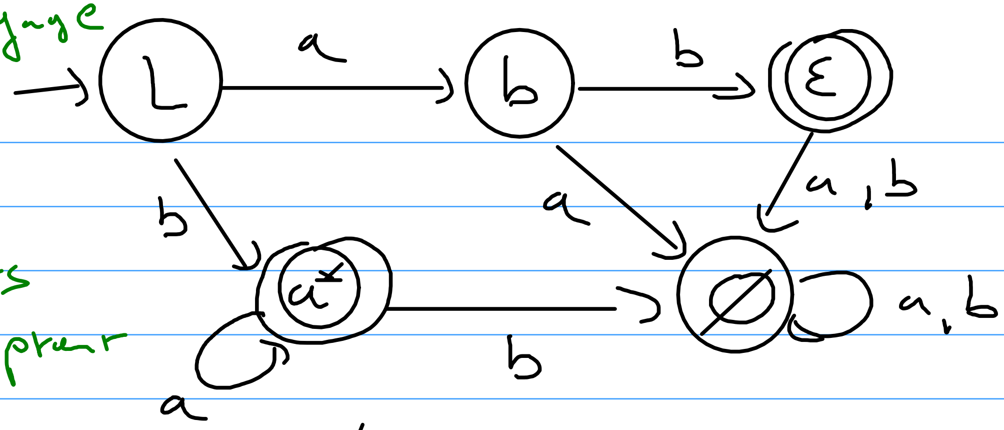
$(bba)^{-1}L = L_4$ $\qquad$ $(bbb)^{-1}L = L_4$



Sans les états acceptant

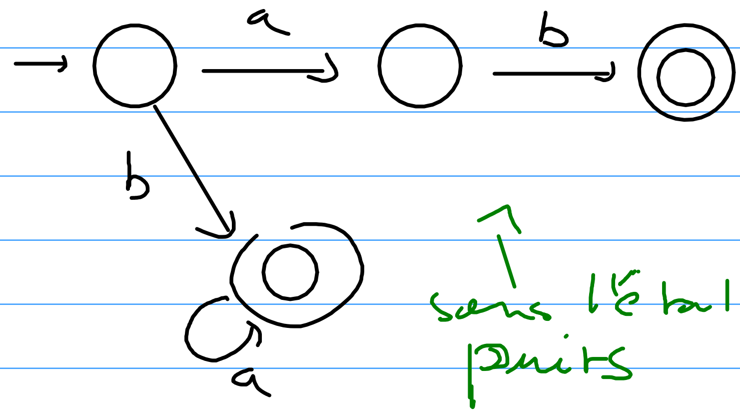
le même écrit avec la valeur du langage

et les états acceptant



automate minimal

M acceptant, M ∋ ε



sans l'état-puits

Essayez sur a^*ba

Q5, 6 de l'ex 2