

TD n°12

Un problème et des révisions

Exercice 1 Pour tout langage L sur un alphabet Σ , on définit

$$L^{1/2} = \{u \in \Sigma^* \mid uu \in L\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si L est reconnaissable, alors $L^{1/2}$ l’est aussi.

On suppose L reconnaissable et soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet pour L . Pour tout état $q \in Q$, on note

$$G_q = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, u) = q\}$$

(lorsqu’on lit u depuis q_0 , on arrive dans l’état q)

et

$$D_q = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, u) \in F\}$$

(lorsqu’on lit u depuis q , on arrive dans un état final)

1. Montrez que, pour tous $q, q' \in Q$, les langages G_q et D_q sont reconnaissables.
2. pour un $q \in Q$ donné, que vaut $G_q \cap D_q$?
3. Exprimez $L^{1/2}$ en fonction des ensembles G_q et D_q .
4. Concluez.

Pour un autre exercice de ce type voir Examen 2018 sur Moodle.

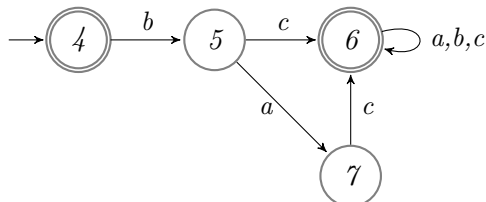
Révisions

Exercice 2 Soit $Min = \{a, b, c, \dots, z\}$ l’ensemble de toutes les lettres minuscules. On considère l’alphabet $\Sigma = \{_ \} \cup Min$.

Soit $L = \{u_v \mid u, v \in Min^*, u \neq v\}$.

1. Calculez $(abc)^{-1}L$, $(abc_ab)^{-1}L$ et $(abc_def)^{-1}L$
2. On rappelle qu’un mot w sépare des mots v_1 et v_2 , pour un langage L donné, quand $v_1w \in L$ et $v_2w \notin L$, ou $v_1w \notin L$ et $v_2w \in L$. Trouvez un mot qui sépare les deux mots ab et $abab$.
3. Montrez que, si $v_1, v_2 \in Min^*$ et $v_1 \neq v_2$ alors il y a un mot qui sépare v_1 et v_2 .
4. Qu’est-ce qu’il en suit pour le nombre de classes d’équivalence de la relation \sim_L ?
5. Est-ce que le langage L est reconnaissable ?
6. Le langage $L' = \{u_1_u_2_ \dots _u_n \mid u_i \in Min^* \text{ pour tous les } i, u_i \neq u_j \text{ pour tous les } i \neq j\}$, est-il reconnaissable ? Pourquoi ou pourquoi non ?

Exercice 3 (Lemme d'Arden) Utilisez le lemme d'Arden pour trouver une expression rationnelle correspondant au langage reconnu par cet automate.



Exercice 4 (Résiduels) Construisez l'automate pour les langages suivants en utilisant le calcul des résiduels :

1. $L_1 = b(ab)^* + (ab)^*a$
2. $L_2 = a(b + ab)^* + b^*(a + bb)$

Exercice 5 (*) Clôture par Morphisme** Un morphisme de mot est une fonction $\varphi : \Sigma_1^* \mapsto \Sigma_2^*$ qui envoie un mot sur l'alphabet Σ_1 vers un mot sur l'alphabet Σ_2 telle que pour tout $u, v \in \Sigma_1^*$, $\varphi(u \cdot v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$. Il suffit pour définir un morphisme de donner les valeurs $\varphi(a)$ pour tout $a \in \Sigma_1$. On remarquera que $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

1. Soit le morphisme de $\{a, b, c\}^*$ vers $\{A, B\}^*$ défini par $\varphi(a) = AAB$, $\varphi(b) = \varepsilon$ et $\varphi(c) = BA$.
 - Donnez la valeur de $\varphi(abbcc)$.
 - Soit L , le langage reconnu par l'automate de l'exercice 1, donnez un automate qui reconnaît $\varphi(L)$
2. Pouvez-vous généraliser ? C'est-à-dire pouvez-vous montrer (informellement) que si un langage L est reconnaissable, alors $\varphi(L)$ l'est aussi ?