



Automates et analyse lexicale
(AAL3)
L2 – Examen – 2h
18 décembre 2020

Nom :
Prénom :
Numéro d'étudiant :

Consignes :

- Tous documents ou appareils électroniques interdits.
- Vous devez répondre directement sur les traits pointillés.
- Si vous n'avez pas assez de place pour vos réponses (**ce qui ne devrait pas arriver**), demandez une copie d'examen et insérez-y ce sujet complété.
- Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et d'en coller les bords seulement.

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1

Soit A et B les langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : $(aa + b)^*ab$ et $(bab + ab)^*$.
Donner les 3 plus petits mots de $A \cup B$:

1. 2. 3.

Exercice 2

Pour tout langage L , on définit le langage $\text{Pal}(L) = \{u\bar{u} \mid u \in L\}$, où \bar{u} désigne le miroir du mot u .

1. Donner un langage reconnaissable A infini tel que $\text{Pal}(A)$ soit reconnaissable :

Expression rationnelle pour A	Expression rationnelle pour $\text{Pal}(A)$
.....

2. Donner un langage reconnaissable B tel que $\text{Pal}(B)$ ne soit pas reconnaissable :

Expression rationnelle pour B	Description ensembliste pour $\text{Pal}(B)$
.....

Exercice 3

Pour tout langage L , on note $\tilde{L} = \{a^n \mid L \cap \Sigma^n \neq \emptyset\}$: a^n est dans \tilde{L} ssi L possède au moins un mot de longueur n . Le but de cet exercice est de montrer que si L est reconnaissable, alors \tilde{L} aussi.

1. Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $(ab)^*$. Donner ci-dessous des automates finis déterministes à 2 états pour L et \tilde{L} .

AFD pour L	AFD pour \tilde{L}

2. Soit L un langage reconnaissable, et $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD pour L .

À partir de \mathcal{A} , décrire un AFND $\tilde{\mathcal{A}}$ pour \tilde{L} :

.....

.....

.....

3. Conclure :

Exercice 4

Soit L le langage des mots de longueur $4n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, contenant en leur milieu $2n$ lettres a :

$$L = \{ua^{2n}v \mid n \in \mathbb{N}, |u| = |v| = n\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer si A est reconnaissable.

On considère la relation d'équivalence habituelle $u \sim_L v$ ssi $\forall w, [uw \in L \iff vw \in L]$.

1. Donner un mot w permettant de séparer les mots b et bb :
2. Soit i et j des entiers tels que $i < j$.
Donner un mot permettant de séparer les mots b^i et b^j :
3. Combien la relation \sim_L a-t-elle de classes d'équivalence?
4. D'après le théorème de, on a donc (cocher la bonne réponse) :
 L reconnaissable L non reconnaissable

Exercice 5

Soit le langage $L = \{uav \mid |u| \not\equiv |v| \pmod{2}\}$. Est-il reconnaissable?

Compléter la partie correspondante.

Oui, L est décrit par l'expression rationnelle suivante :

.....

Non.

Par l'absurde, si $L \in \text{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le

On choisit $u =$

alors u et $|u|$

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$, y et

$\forall k$,

Or pour $k =$ on a :

.....

Contradiction avec

donc

Même question avec le langage $L = \{uav \mid |u| \leq |v|\}$.

Oui, L est décrit par l'expression rationnelle suivante :

.....

Non.

Par l'absurde, si $L \in \text{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le

On choisit $u = \dots\dots\dots$:

alors $u \dots\dots\dots$ et $|u| \dots\dots\dots$

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy| \dots\dots\dots$, $y \dots\dots\dots$ et

$\forall k, \dots\dots\dots$

Or pour $k = \dots\dots\dots$ on a :

.....

Contradiction avec

donc

Exercice 6

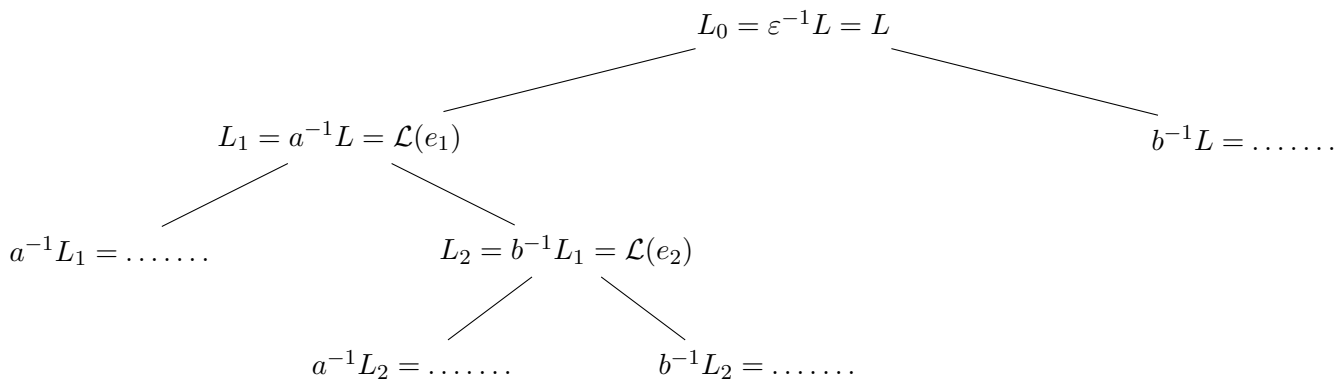
Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $a(aa + bb)^*b$. On se propose de décrire tous les résiduels de L en les ordonnant sous la forme d'un arbre.

1. Donner les expressions rationnelles e_1 et e_2 qui décrivent correctement les résiduels L_1, L_2 dans l'arbre ci-dessous.

$e_1 = \dots\dots\dots$

$e_2 = \dots\dots\dots$

2. Compléter par L_0, L_1, L_2 ou \emptyset les pointillés dans l'arbre des résiduels afin que celui-ci soit correct.



3. Quel(s) résiduel(s) contien(nen)t le mot vide? (cocher la ou les bonnes réponses)

- L_0 L_1 L_2 \emptyset aucun

4. En déduire l'automate fini déterministe et complet minimal pour L , dont les états sont les quatre résiduels ci-dessus : compléter la table de transition suivante (ne pas oublier d'indiquer, sous forme de flèches, l'état initial et le ou les états terminaux).

	a	b
L_0
L_1
L_2
\emptyset

Exercice 7

On considère l'AFD complet \mathcal{A} suivant reconnaissant un certain langage L .

	a	b
$\rightarrow 0$	1	3
$\leftarrow 1$	2	0
2	0	4
3	0	4
$\leftarrow 4$	2	0

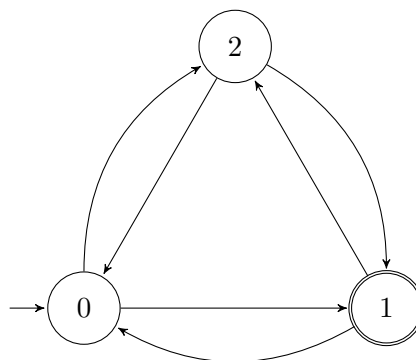
Minimiser \mathcal{A} en complétant les étapes ci-dessous de l'algorithme de Moore.

1. Groupes d'états à l'étape 0 : { } { }

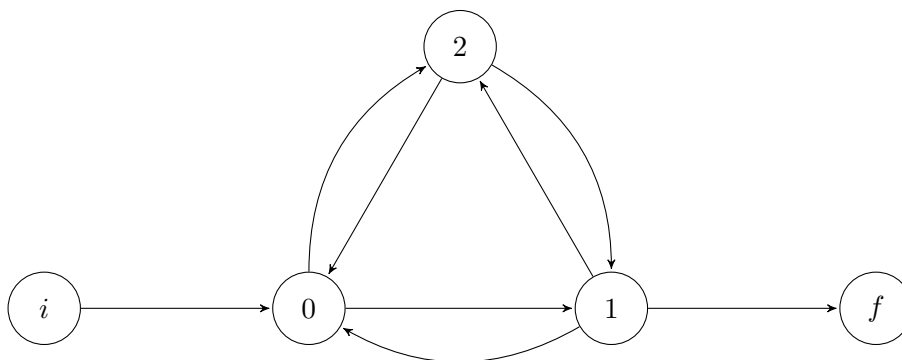
2. a et b séparent de

Groupes d'états à l'étape 1 : { } { } { }

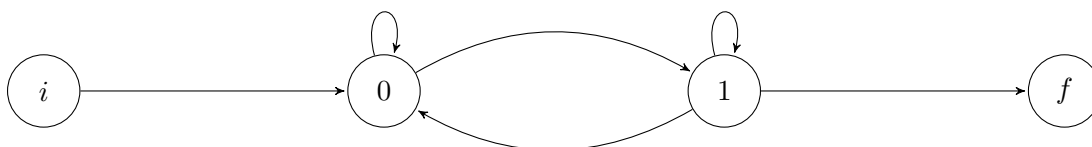
3. a et b ne séparent plus d'états. On obtient l'automate déterministe complet minimal suivant (indiquer les transitions sur le dessin ci-dessous) :



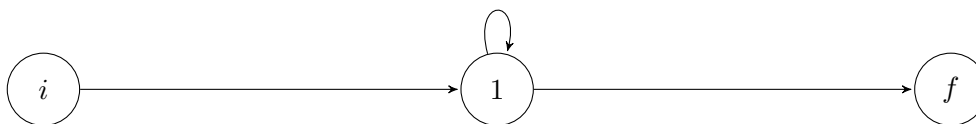
Afin de déterminer une expression rationnelle pour L , compléter les transitions dans les étapes de l'algorithme de Brzozowski-McCluskey ci-dessous.



Élimination de l'état 2.



Élimination de l'état 0.



Élimination de l'état 1.



En s'aidant de l'automate minimal de L trouvé ci-dessus, ou de l'expression rationnelle obtenue par l'algorithme de Brzozowski-McCluskey, déterminer les entiers α , β et γ tels que

$$L = \{u \mid \alpha|u|_a + \beta|u|_b \equiv \gamma \pmod{3}\} :$$

$$\alpha = \dots \quad \beta = \dots \quad \gamma = \dots$$