(Plus que POO après.)

Université de Paris

Automates et analyse lexicale (AAL3) – L2 Examen de session 2 – 2h 22 janvier 2021

Nom :

Prénom :

Numéro d'étudiant :

Consignes :

— Tous documents ou appareils électroniques interdits.

— Vous devez répondre directement sur les traits pointillés.

— Si vous n'avez pas assez de place pour vos réponses (**ce qui ne devrait pas arriver**), demandez une copie d'examen et insérez-y ce sujet complété.

— Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et d'en coller *les bords seulement*.

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1

Soit A et B les langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : $(ba)^*(ab+a)^*$ et $ab+(aa+bb)^*$. Donner les 3 plus petits mots de $A \cap B$:

1. .... **2.** .... **3.** ....

Exercice 2

Soit L un langage reconnu par un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. On définit

$$\mathsf{Ext}(L) = \{u \in L \mid \forall v \neq \varepsilon, uv \notin L\}$$

(l'ensemble des mots « extrémaux » de L : ils ne peuvent être complétés sans sortir de L). Le but de cet exercice est de montrer que $\mathsf{Ext}(L)$ reste reconnaissable.

Pour $q \in Q$, on note

$$L_q = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, u) \in F\}$$

(en lisant u dans $\mathcal{A}$ à partir de q on arrive dans un état final).

1. Soit $q \in F$. Si u est un mot tel que $\delta^*(q_0, u) = q$, montrer que :

$$u \in \mathsf{Ext}(L) \text{ ssi } L_q = \{\varepsilon\}.$$

....

....

....

....

2. À partir de $\mathcal{A}$, décrire un automate fini pour $\mathsf{Ext}(L)$.

....

....

....

....

....

Exercice 3

Soit L le langage

$$L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u|_a = 2^n\}$$

(l'ensemble des mots dont le nombre de a est une puissance de deux). Le but de cet exercice est de déterminer si L est reconnaissable.
On considère la relation d'équivalence habituelle $u \sim_L v$ ssi $\forall w, [uw \in L \iff vw \in L]$.

1. Donner un mot w permettant de séparer les mots a et aa : ....

2. Soit i et j des entiers tels que $i < j$.
Donner un mot permettant de séparer les mots a^{2^i} et a^{2^j} : ....

3. Combien la relation $\sim_L$ a-t-elle de classes d'équivalence ? ....

4. D'après le théorème de ...., on a donc (cocher la bonne réponse) :
☐ L reconnaissable ☐ L non reconnaissable

Exercice 4

Soit le langage $L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u|_a + 2|u|_b = n^2\}$ (l'ensemble des mots u tels que $|u|_a + 2|u|_b$ est un carré). Est-il reconnaissable ? Compléter la partie correspondante.

Oui, L est reconnu par l'automate suivant :

Non.
Par l'absurde, si $L \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ .... , y .... et

$\forall k$, ...

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

Même question avec le langage $L = \{u \in \Sigma^* \mid |u|_a + 2|u|_b \equiv 1 \mod 3\}$.

Oui, L est reconnu par l'automate suivant :

Non.
Par l'absurde, si $L \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ .... , y .... et

$\forall k$, ...

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

Exercice 5

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $e = (bb + ba)^*(ab + aa)$.
Compléter les étapes ci-dessous de l'algorithme de Glushkov pour obtenir un automate fini non déterministe $\mathcal{A}$ pour L.

1. Expression rationnelle linéarisée (on appellera $x_1, \ldots, x_8$ les nouvelles variables) : ....

....

2. Tableau des successeurs

début	....
x_1	....
x_2	....
x_3	....
x_4	....
x_5	....
x_6	....
x_7	....
x_8	....

3. Table de transitions (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux)

	a	b
0	....	....
1	....	....
2	....	....
3	....	....
4	....	....
5	....	....
6	....	....
7	....	....
8	....	....

Déterminiser l'automate $\mathcal{A}$ pour obtenir un automate déterministe *complet* $\mathcal{A}'$ via la table de transitions suivante à compléter (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux).

	a	b
0	....	....
$\{1, 3\}$	....	....
$\{5, 7\}$	....	....
2	....	....
4	....	....
6	....	....
8	....	....
p	....	....

On renommera les états de $\mathcal{A}'$ de 0 à 7 comme suit *(vous êtes encouragé à écrire sur votre brouillon la table de transitions avec les nouveaux numéros)* :

Ancien nom	0	$\{1,3\}$	$\{5,7\}$	2	4	6	8	p
Nouveau nom	0	1	2	3	4	5	6	7

Minimiser $\mathcal{A}'$ en complétant les étapes ci-dessous de l'algorithme de Moore.

1. Groupes d'états à l'étape 0 : {..................} {..................}

2. a et b séparent .... de ....

Groupes d'états à l'étape 1 : {..................} {..................} {..................}

3. a sépare .... de ....

Groupes d'états à l'étape 2 :

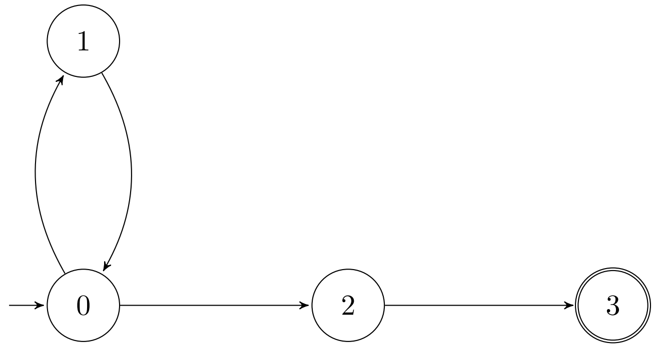
{..................} {..................} {..................} {..................}

4. a et b séparent .... de ....

Groupes d'états à l'étape 3 : {..................} {..................} {..................}

{..................} {..................}

En supprimant l'état puits, on obtient l'automate déterministe minimal (non complet) suivant (indiquer les transitions sur le dessin ci-dessous) :



En utilisant la méthode du lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle pour le langage décrit par l'automate précédent : écrire puis résoudre le système d'équations sur les langages L_0, L_1, L_2 et L_3 en complétant ce qui suit.

$$\begin{cases} L_0 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Donc $L_2 =$ ....

d'où l'expression pour L_0 :

$L_0 =$ ....

donc par le lemme d'Arden :

$L_0 =$ ....

L'expression rationnelle trouvée est donc $e' =$ ....

Exercice 6

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $a^*\big(b^2b^* + (ba)(aa)^*(ab)b^*\big)$.

1. Décrivez les cinq résiduels distincts de L :

$L_1 =$ ....

$L_2 =$ ....

$L_3 =$ ....

$L_4 =$ ....

$L_5 =$ ....

2. En déduire l'automate fini déterministe et complet minimal pour L : compléter la table de transitions suivante (ne pas oublier d'indiquer, sous forme de flèches, l'état initial et le ou les états terminaux).

	a	b
L_1	....	....
L_2	....	....
L_3	....	....
L_4	....	....
L_5	....	....