(Plus que POO après.)

Université de Paris

Automates et analyse lexicale (AAL3) – L2
Examen de session 2 – 2h
22 janvier 2021

Nom : Correction

Prénom : Session 2

Numéro d'étudiant : 2021

Consignes :

- Tous documents ou appareils électroniques interdits.
- Vous devez répondre directement sur les traits pointillés.
- Si vous n'avez pas assez de place pour vos réponses (**ce qui ne devrait pas arriver**), demandez une copie d'examen et insérez-y ce sujet complété.
- Inscrivez vos nom, prénom et numéro d'étudiant dans l'onglet ci-dessus avant de le replier et d'en coller *les bords seulement.*

Les langages considérés seront sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1

Soit A et B les langages donnés par les expressions rationnelles suivantes : $(ba)^*(ab + a)^*$ et $ab + (aa + bb)^*$. Donner les 3 plus petits mots de $A \cap B$:

1. ε **2.** aa **3.** ab

Exercice 2

Soit L un langage reconnu par un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$. On définit

$$\mathsf{Ext}(L) = \{u \in L \mid \forall v \neq \varepsilon, uv \notin L\}$$

(l'ensemble des mots « extrémaux » de L : ils ne peuvent être complétés sans sortir de L). Le but de cet exercice est de montrer que $\mathsf{Ext}(L)$ reste reconnaissable.
Pour $q \in Q$, on note

$$L_q = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, u) \in F\}$$

(en lisant u dans $\mathcal{A}$ à partir de q on arrive dans un état final).

1. Soit $q \in F$. Si u est un mot tel que $\delta^*(q_0, u) = q$, montrer que :

$$u \in \mathsf{Ext}(L) \text{ ssi } L_q = \{\varepsilon\}.$$

$L_q = \{\varepsilon\}$ ssi à partir de q on ne peut pas arriver dans un état final en lisant un mot non vide ssi $u \in \mathsf{Ext}(L)$.

2. À partir de $\mathcal{A}$, décrire un automate fini pour $\mathsf{Ext}(L)$.

   Il s'agit de l'automate $\mathcal{A}$ où les états terminaux sont les états $q \in F$ tels que $L_q = \{\varepsilon\}$.

Exercice 3

Soit L le langage

$$L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u|_a = 2^n\}$$

(l'ensemble des mots dont le nombre de a est une puissance de deux). Le but de cet exercice est de déterminer si L est reconnaissable.
On considère la relation d'équivalence habituelle $u \sim_L v$ ssi $\forall w, [uw \in L \iff vw \in L]$.

1. Donner un mot w permettant de séparer les mots a et aa : a.

2. Soit i et j des entiers tels que $i < j$.
Donner un mot permettant de séparer les mots a^{2^i} et a^{2^j} : a^{2^i}.

3. Combien la relation $\sim_L$ a-t-elle de classes d'équivalence ? Une infinité.

4. D'après le théorème de Myhill-Nerode, on a donc (cocher la bonne réponse) :

☐ L reconnaissable ☑ L non reconnaissable

Exercice 4

Soit le langage $L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u|_a + 2|u|_b = n^2\}$ (l'ensemble des mots u tels que $|u|_a + 2|u|_b$ est un carré). Est-il reconnaissable ? Compléter la partie correspondante.

Oui, L est reconnu par l'automate suivant :

Non.
Par l'absurde, si $L \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le lemme de l'étoile.

On choisit $u = a^{N^2}$:

alors $u \in L$ et $|u| \geq N$

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy| \leq N$, $y \neq \varepsilon$ et

$\forall k$, $xy^k z \in L$

Or pour $k = 2$ on a :

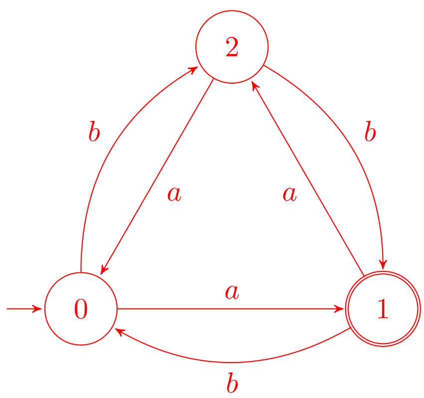
$xy^2z = a^{N^2+|y|} \notin L$ car $N^2 < N^2 + |y| \leq N^2 + N < (N+1)^2$
donc $N^2 + |y|$ n'est pas un carré

Contradiction avec l'hypothèse $L \in \mathsf{Rec}$

donc $L \notin \mathsf{Rec}$

Même question avec le langage $L = \{u \in \Sigma^* \mid |u|_a + 2|u|_b \equiv 1 \mod 3\}$.

Oui, L est reconnu par l'automate suivant :



Non.
Par l'absurde, si $L \in \mathsf{Rec}$ alors soit N l'entier donné par

le ....

On choisit $u =$ .... :

alors u .... et $|u|$ ....

donc il existe un découpage $u = xyz$ avec

$|xy|$ ...., y .... et

$\forall k$, ...

Or pour $k =$ .... on a :

....

Contradiction avec ....

donc ....

Exercice 5

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $e = (bb + ba)^*(ab + aa)$.
Compléter les étapes ci-dessous de l'algorithme de Glushkov pour obtenir un automate fini non déterministe $\mathcal{A}$ pour L.

1. Expression rationnelle linéarisée (on appellera $x_1, \ldots, x_8$ les nouvelles variables) :

$$(x_1x_2 + x_3x_4)^*(x_5x_6 + x_7x_8)$$

2. Tableau des successeurs

début	$1, 3, 5, 7$
x_1	2
x_2	$1, 3, 5, 7$
x_3	4
x_4	$1, 3, 5, 7$
x_5	6
x_6	fin
x_7	8
x_8	fin

3. Table de transitions (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux)

	a	b
$\to 0$	$5, 7$	$1, 3$
1	–	2
2	$5, 7$	$1, 3$
3	4	–
4	$5, 7$	$1, 3$
5	–	6
$\leftarrow 6$	–	–
7	8	–
$\leftarrow 8$	–	–

Déterminiser l'automate $\mathcal{A}$ pour obtenir un automate déterministe *complet* $\mathcal{A}'$ via la table de transitions suivante à compléter (indiquer avec des flèches l'état initial et les états terminaux).

	a	b
$\to 0$	$\{5, 7\}$	$\{1, 3\}$
$\{1, 3\}$	4	2
$\{5, 7\}$	8	6
2	$\{5, 7\}$	$\{1, 3\}$
4	$\{5, 7\}$	$\{1, 3\}$
$\leftarrow 6$	p	p
$\leftarrow 8$	p	p
p	p	p

On renommera les états de $\mathcal{A}'$ de 0 à 7 comme suit *(vous êtes encouragé à écrire sur votre brouillon la table de transitions avec les nouveaux numéros)* :

Ancien nom	0	$\{1,3\}$	$\{5,7\}$	2	4	6	8	p
Nouveau nom	0	1	2	3	4	5	6	7

Minimiser $\mathcal{A}'$ en complétant les étapes ci-dessous de l'algorithme de Moore.

1. Groupes d'états à l'étape 0 : $\{0,1,2,3,4,7\}$ $\{5,6\}$

2. a et b séparent 2 de 0, 1, 3, 4, 7

Groupes d'états à l'étape 1 : $\{0,1,3,4,7\}$ $\{2\}$ $\{5,6\}$

3. a sépare 0, 3, 4 de 1, 7

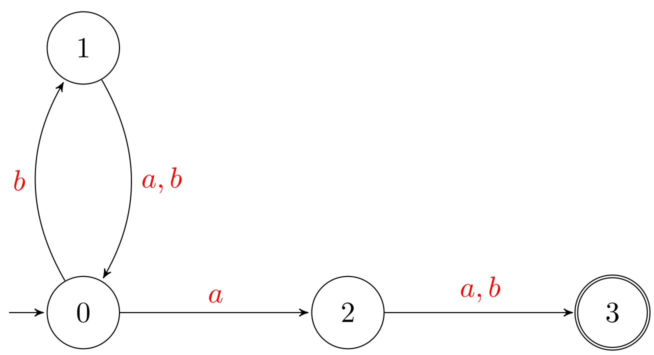
Groupes d'états à l'étape 2 :

$\{0,3,4\}$ $\{1,7\}$ $\{2\}$ $\{5,6\}$

4. a et b séparent 1 de 7

Groupes d'états à l'étape 3 : $\{0,3,4\}$ $\{1\}$ $\{2\}$ $\{5,6\}$ $\{7\}$

En supprimant l'état puits, on obtient l'automate déterministe minimal (non complet) suivant (indiquer les transitions sur le dessin ci-dessous) :



En utilisant la méthode du lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle pour le langage décrit par l'automate précédent : écrire puis résoudre le système d'équations sur les langages L_0, L_1, L_2 et L_3 en complétant ce qui suit.

$$\begin{cases} L_0 = bL_1 + aL_2 \\ L_1 = (a+b)L_0 \\ L_2 = (a+b)L_3 \\ L_3 = \varepsilon \end{cases}$$

Donc $L_2 = (a+b)$

d'où l'expression pour L_0 :

$L_0 = b(a+b)L_0 + a(a+b)$

donc par le lemme d'Arden :

$L_0 = \big(b(a+b)\big)^* a(a+b)$

L'expression rationnelle trouvée est donc $e' = \big(b(a+b)\big)^* a(a+b)$

Exercice 6

Soit L le langage décrit par l'expression rationnelle $a^*\big(b^2b^* + (ba)(aa)^*(ab)b^*\big)$.

1. Décrivez les cinq résiduels distincts de L :

$L_1 = L$

$L_2 = b^{-1}L = b^+ + a(aa)^*(ab)b^*$

$L_3 = a^{-1}L_2 = (aa)^*(ab)b^*$

$L_4 = b^{-1}L_2 = b^*$

$L_5 = b^{-1}L_3 = \emptyset$

4. En déduire l'automate fini déterministe et complet minimal pour L : compléter la table de transitions suivante (ne pas oublier d'indiquer, sous forme de flèches, l'état initial et le ou les états terminaux).

	a	b
$\rightarrow L_1$	L_1	L_2
L_2	L_3	L_4
L_3	L_2	L_5
$\leftarrow L_4$	L_5	L_4
L_5	L_5	L_5